Contenido

[1. Dominio 2](#_Toc147832861)

[2. Rango 3](#_Toc147832862)

[3. Curvas de nivel 3](#_Toc147832863)

[4. Límites de funciones de 2 variables 4](#_Toc147832864)

[4.1. Cálculo sencillo de límites 4](#_Toc147832865)

[4.2. Indeterminación 0/0 4](#_Toc147832866)

[4.3. Límites iterados 7](#_Toc147832867)

[4.4. Método de las trayectorias 7](#_Toc147832868)

[4.5. Método de las trayectorias rectilíneas 7](#_Toc147832869)

[4.6. Cambio a variables polares 8](#_Toc147832870)

[4.7. Método de mayoración, acotamiento o regla del sándwich 8](#_Toc147832871)

[5. Continuidad de funciones de 2 variables 9](#_Toc147832872)

**Funciones en varias variables**

# Dominio

Sea una función z=f(x,y), el dominio son los posibles valores que pueden tomar la x y la y. Estos valores se expresan como inecuaciones.

Gráficamente representa la proyección de la superficie sobre el eje x e y. En la gráfica de abajo, la superficie en azul y el dominio es la proyección en gris oscuro sobre el plano xy.

Paraguas de colores

Descripción generada automáticamente con confianza media

## Cálculo de dominios de funciones genéricas

* Polinomios: todos los números reales
* Racionales: todos los números reales salvo los que anulen el denominador
* Radicales con índice par: los números que hagan el radicando mayor o igual que 0
* Exponenciales: todos los números reales
* Logaritmos: todos los números reales mayores que 0.
* Funciones seno y cose: todos los números reales

# Rango

El rango es el intervalo de valores que puede tomar el eje de la z. En la imagen de abajo pude observarse que el rango va desde 1 hasta 5.

Gráfico, Gráfico radial

Descripción generada automáticamente

# Curvas de nivel

Supongamos que a la gráfica del apartado 1 en la página 2 la cortamos con planos horizontales; las intersecciones entre esos planos y la superficie serán las curvas de nivel. En la gráfica de abajo, las curvas de nivel vienen representadas por circunferencias verdes y rojas en trazo discontinuo.

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Los planos horizontales tendrán por ecuación, z=k; donde k es cualquier valor real. En la práctica para determinar las curvas de nivel en un ejercicio lo que hay que tener en cuenta es que calcular la intersección entre una superficie z=f(x,y) y un plano z=k es en definitiva sustituir todas las incógnitas z de la superficie por el parámetro k obteniendo así una familia de curvas.

# Límites de funciones de 2 variables

El concepto de límite para funciones de 2 variables es el mismo que para funciones de una sola variable. Es decir, el límite es el valor al que tiende la z cuando la x tiende a x0 y la y tiende a y0.

## Cálculo sencillo de límites

En el caso más sencillo, lo que hay que hacer es simplemente sustituir las x y las y de la función por los valores a los que tienden. En la práctica esto es el primer paso que hay que dar cuando se calcula un límite.

## Indeterminación 0/0

Lo más habitual es que esto presente indeterminación 0/0, lo cuál da lugar a pensar que podemos resolverlo por los métodos habituales que ya conocemos: factorizando y simplificando, racionalizando, etc.

Si esto no es posible, entonces hay que recurrir a varios métodos se comentan a continuación. Antes de comenzar el proceso es muy importante entender que aquí varía el concepto respecto a lo que se venía haciendo en cursos anteriores.

Con una variable, la función se dibujaba en el plano; el límite en una variable existía si los límites laterales coincidían. Un límite lateral era el valor al que tendía la y cuando la x tendía a x0 por la izquierda o por la derecha.

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Cuando el límite lateral por la izquierda y el límite lateral por la derecha coinciden como en la gráfica de arriba, se dice que existe el límite:

El problema con 2 variables es que las gráficas de 2 variables son en 3 dimensiones y ya no sólo pueden darse dos direcciones de acercamiento a x0, si no que las posibles direcciones de acercamiento son infinitas. En la gráfica 3D de abajo se puede ver que efectivamente hay infinitas restas que pasan por el punto A y sean tangentes a la superficie, lo que representa algunas de las infinitas direcciones por las que se puede acercar al punto.

Gráfico, Gráfico radial

Descripción generada automáticamente

De este modo con una variable pueden comprobarse los límites laterales, que eran 2, y si ambos coincidían entonces, ese era el valor del límite; pero ahora no se pueden probar los infinitos límites en las infinitas direcciones la punto x0. La táctica ahora es por lo tanto ir probando direcciones hasta que se encuentren 2 límites direccionales que no coincidan para así demostrar la no existencia del límite.

Antes de probar los siguientes métodos hay que comentar que es útil evaluar el límite en x=0 e y=0. Si no es el caso, hay que hacer un cambio de variables para que así sea:

## Límites iterados

Parte de la base de que el límite de una función en 2 variables se puede descomponer en 2 límites de una variable, uno para cada variable. Es decir:

Como se dijo antes, si estos límites no coinciden, entonces ya se ha demostrado que el límite no existe

El problema es que la afirmación contraria no demuestra la existencia, es decir, que la existencia de los límites iterados no demuestra la existencia del límite.

## Método de las trayectorias

Antes de aplicar este método hay que hacer los límites iterados, a menudo con ellos se puede demostrar la no existencia.

Este método consiste en acercarse al punto (0, 0) por una función y=f(x). Supone reducir el cálculo del límite en 2 variables al cálculo del límite en una variable sustituyendo la y por una función de x. En la práctica se escoge una función y=f(x) que sea favorable y facilite el cálculo posterior.

## Método de las trayectorias rectilíneas

Es un caso particular del método de las trayectorias. Consiste en acercarse al punto por trayectorias rectilíneas. Una recta tiene la siguiente ecuación:

Se puede simplificar la ecuación anterior haciendo que n=0, quedando:

Basta entonces con sustituir la y por mx en la ecuación de la superficie resultando el siguiente límite.

Como puede intuirse, puede esperarse que el resultado quedará en función de m, salvo que ésta se anule por algún motivo. En última instancia, si el resultado queda en función de m, entonces para cada valor de m el límite será diferente y ya se habría demostrado que el límite no existe; sin embargo, si el resultado no queda en función de m, entonces todos los límites son iguales y no se habrá demostrado nada, teniendo que continuar con otro método.



## Cambio a variables polares

El cambio a coordenadas polares consiste en acercarse al punto no por una función ni por una recta, si no, por una circunferencia. En la práctica lo que se hace es el siguiente cambio de variables:

El cálculo del límite después de hacer el cambio de variable quedaría así:

Este cálculo es útil cuando tenemos expresiones tales como x2+y2 ya que hacer el cambio de variables quedaría así:

Como puede intuirse, puede esperarse que el resultado quedará en función de θ, salvo que ésta se anule por algún motivo. En última instancia, si el resultado queda en función de θ, entonces para cada valor de θ el límite será diferente y ya se habría demostrado que el límite no existe; sin embargo, si el resultado no queda en función de m, entonces todos los límites son iguales y no se habrá demostrado nada, teniendo que continuar con otro método.



## Método de mayoración, acotamiento o regla del sándwich

Si se ha llegado hasta aquí es porque no se ha sido capaz de encontrar ninguna manera de demostrar que el límite no existe; en todos los límites calculados salía el mismo resultado independientemente del camino seguido para acercarse al punto. Habrá entonces que empezar a pensar que el límite existe y que su valor es efectivamente el que ha ido saliendo a lo largo del cálculo de los límites anteriores, pongamos un resultado genérico L.

Esto implica que podemos pasar L al otro lado de la igualdad:

Hay que encontrar 2 funciones h(x,y) y g(x,y) de modo que:

Lo cuál nos lleva al caso particular de:

Como se ve h(x,y) es la más pequeña de todas, simplemente definimos h(x,y)=0 y entonces quedaría así:

Con respecto a g(x,y) hay que encontrar una función que podamos asegurar que va a ser mayor que f(x,y). A este proceso de búsqueda se le llama mayorar. Podemos hacer uso de las siguientes desigualdades e igualdades:

# Continuidad de funciones de 2 variables

Dada z=f(x,y) y (x0, y0) ∈ ℝ, se dice que f(x, y) es continua en (x0, y0) si:

Gráficamente una función continua se ve una suavidad en la superficie sin saltos abruptos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ejemplo de función continua en (0, 0)** | **Ejemplo de función discontinua en (0, 0)** |
| Paraguas de colores  Descripción generada automáticamente con confianza media |  |